UNIDAD 1
PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

El pensamiento numérico, nos permite comprender el uso u el significado de los números y la numeración, comprensión del conteo, del concepto de número y de las relaciones ariméticas como de los sistemas numéricos.

- Comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los sistemas numéricos.
- Comprender el significado de las operaciones y como se relacionan unas con otras.
- Hacer computos de manera fluida y hacer estimaciones razonables.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación. Dichos planteamientos se enriquecen si, además, se propone trabajar con las magnitudes, las cantidades y sus medidas como base para dar significado y comprender mejor los procesos generales relativos al pensamiento numérico y para ligarlo con el pensamiento métrico. Por ejemplo, para el estudio de los números naturales, se trabaja con el conteo de cantidades discretas y, para el de los números racionales y reales, de la medida de magnitudes y cantidades continuas.

1. Lección 1. Números naturales y enteros

Los números naturales son los que forman parte de una sucesión que va aumentando de unidad en unidad a partir del cero. Esto es entonces que son los números positivos que no tienen decimales.

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Reciben su nombre, pues surgen en forma natural por la necesidad de contar.

DIVISIBILIDAD:
Un número natural a, será divisible por otro b, si al realizar la operación $\frac{a}{b}$, el resulatdo es un número natural. Esto quiere decir que el número b, está un número exacto de de veces en a. Así, 8 es divisible por 4 pero no por 3.

NÚMERO PRIMO:
Un número primo es aquel número entero que solo es divisible por si mismo y por la unidad.
Ejemplo de números primos: 17, 91, 53.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARIMÉTICA: Todo número natural se puede expresar como un producto indicado único de números primos Si ha esta secesión le añdimos los nímeros negativos, tendremos entonces los números *enteros*. Por ejemplo el número 114 se puede expresar como 2x3x19, que son números primos.
Calculadora para factorizar:
En la siguiente dirección se encuentra una calculadora que al digitarle un número, nos entrega la descomposición en factores de dicho número.
http://es.onlinemschool.com/math/assistance/number_theory/multiplier/
EJERCICIO:
Utilizando la calculadora para factorizar, factorizar los siguientes números:

- 4545
- 5050
- 2323
- 1111
- 8080
- 7676

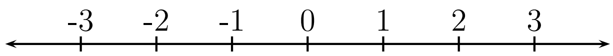
Responda las siguientes preguntas.

1. ¿Que caracteristicas tiene los números que factorizó?
2. ¿Que característica observa al factorizar los números?
3. Haga una conjetura de estas observaciones.

NÚMEROS ENTEROS:
Los números enteros son la extensión de los números naturales pues se añaden los números negativos.

$$Z = \{\cdots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

Una muy buena manera de representarlos es por medio de una recta, denominada recta numérica.



Así, si en la recta numérica nos ubicamos en -3 y nos despalazamos 5 unidades a la derecha, llegariamos hasta 2. Esto equivale a la operación

$$-3 + 5 = 2$$

2. LECCIÓN 2. MCM Y MCD.

Para introducir el concepto de *mínimo común múltiplo*, hagamos el siguiente ejemplo.
Encontrar el MCM de 2, 3, 4.
Primero realicemos una lista con los múltiplos de cada número.
2: $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, \ldots$
3: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, \ldots$
4: $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \ldots$
Ahora realicemos una lista con los múltiplos que estan en todas las 3 listas de múltiplos. A esta lista la llamaremos *Múltiplos comunes*.
Múltiplos comunes$=12, 24, 36, \ldots$
Pero de esta lista el valor menor, (el mínimo) es 12. Por esto el MCM es 12.

En la siguiente página, se encuentra una calculadora que permite encontrar MCM de dos o tres números

http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/minimo-multiplo-comun-tool.html

MCD.

Encontrar el MCD de 8, 16, 24.
Primero encontremos los divisores de cada número:
8: 1, 2, 4, 8.
16: 1, 2, 4, 8.
24: 1, 2, 4, 6, 8, 12.
Ahora, los dicisores comunes son 1, 2, 4, 8.
Y de esta última lista, el divisor común máximo es 8. MCD=8.

En la siguiente página, se encuentra una calculadora que permite encontrar MCM de dos o tres números
http://es.onlinemschool.com/math/assistance/number_theory/nod_nok/

3. LECCIÓN 3. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES.

Definimos un número racional como un número de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros.
Así los números, $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{3}$ son números racionales. Y de la misma forma, los son 5 y -3, pues se pueden expresar como $\frac{5}{1}$ y $\frac{-3}{1}$.
Una misma fracción, se puede expresar de formas distinta, pero equivalentes.

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25}$$

Para hacer fracciones equivalentes, se hace uso del proceso de ampliación y simplificación.

EJEMPLO

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 5}{5 \times 5} = \frac{20}{25}$$

EJEMPLO

$$\frac{25}{10} = \frac{25/5}{10/5} = \frac{5}{2}$$

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS RACIONALES.
Para sumar o restar números racionales, estos deben tener igual denominador.
Por ejemplo

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Observe como en este caso, se mantuvo el mismo denominador y se sumaron los numeradores.
De igual forma

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Pero, ¿que pasa si las fracciones tienen distintinto denominador?
En este caso caso transformamos las fracción en equivalentes, con igual denominador, multiplicando tanto el numerador como el denominador por un valor que nos de el MCM de los denominadores.

EJEMPLO
Realizar la siguiente operación.

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{7}$$

En este caso las fracciones tienen distinto denominador, entonces pasamos a identificar el MCM de los denominadores, que en este caso es 35, por eso debemos multiplicar el numerador y el denominador de la primera fracción por 7 y el de la segunda por 5.

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{7}=\frac{4\times 7}{5\times 7}+\frac{3\times 5}{7\times 5}=\frac{28}{35}+\frac{15}{35}=\frac{43}{35}$$

EJEMPLO
Realizar la siguiente operación

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{4+2-1}{8}=\frac{5}{8}$$

ACTIVIDADES

Realizar las siguientes operaciones

1. $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}$
2. $\frac{3}{7}-\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{3}+3-\frac{2}{3}$
4. $\frac{3}{4}-\frac{7}{2}-\frac{5}{12}$

ACTIVIDADES

1. Escriba $<$ ó $>$—, según corresponda

   a) $\frac{2}{6}\dots\frac{4}{6}$

   b) $-\frac{5}{7}\dots\frac{11}{7}$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES.
Para multiplicar números racionales, debemos multiplicar numerador con numerador y denominador con denominador

EJEMPLO

$$\frac{3}{7}\times\frac{8}{5}=\frac{3\times 8}{7\times 5}=\frac{24}{35}$$

$$\frac{5}{7}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{5\times 4\times 3}{7\times 9\times 2}=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$$

Para dividir dos números racionales, multiplicamos el dividendo por el recíproco del divisor:

EJEMPLO

4. LECCIÓN 4. REGLA DE TRES SIMPLE E INVERSA

Para empezar esta lección, primero definamos 2 términos, como son magnituces directamente proporcionales e inversamenta proporcionales.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES:
Dos magintudes son directamente proporcionales si al aumentar una, la otro también lo hace. Por ejemplo el costo de cierto número de libros. Si compramos más cantidad de libros, pues el costo también aumentará.

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES:
Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si al aumentar una, la otra disminuye. Por ejemplo la velocidad y el tiempo son inversamente proporcionales, pues si un móvil aumenta la velocidad, pues se demorará menos tiempo en hacer su recorrido.

4.1. Regla de tres simple

Si tenemos magnitudes directamente proporcionales, se reaaliza la igualdad de 2 razones.

EJEMPLO
Seis cuadernos tienen un precio de $19200. ¿Cuanto cuestan 15 cuadernos?

SOLUCIÓN

Número de cuadernos	Valor
6	19200
15	x

Ahora, planteamos la igualdad de razones

$$\frac{6}{15} = \frac{19200}{x}$$

$$x = \frac{19200 \times 15}{6}$$

$$x = 48000$$

Esto quiere decir que 15 cuadernos cuestan $48000.

En la siguiente página hay una calculadora que resuelve regla de tres
http://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/calculadora-de-regla-de-tres/
EJERCICIOS:

1. Un niño de de 1.5 m de alto proyecta una sombre de 0.9 m ¿Cuanto medirá un árbol cuya sombra mide 1.8 m?

2. Para hacer un pasteel de manzanas para 4 personas, se necesitan los siguientes ingredientes:

   - 2 huevos.
   - 4 manzanas.
   - 6 cucharadas de azucar.

   ¿Cuánto de cada ingrediente se requiere para hacer un pastel para 10 personas?

4.2. Regla de tres inversa

Si tenemos magnitudes inversamente proporcionales, se plantea las proporciones pero se debe invertir una de las dos razones.

EJEMPLO.
Un automovil viaja a la velocidad de 80 $\frac{km}{h}$, y se demora 2 horas en hacer su recorrido. Cuanto se demorará en hacer el mismo recorrido si viaja con una velocidad de 60 $\frac{km}{h}$. SOLUCIÓN

Velocidad	Tiempo
80	2
60	x

$$\frac{80}{60} = \frac{x}{2}$$

Observe que se invirtió la razón del lado derecho de la igualdad

$$x = \frac{80 \times 2}{60} = 2,66\text{horas}$$

En la siguiente página hay una calculadora que resuelve regla de tres inversa
http://www.gyplan.com/es/rule_three_ip_es.html

EJERCICIOS:

1. Un equipo de 10 trabajadores, demoró 30 días para pavimentar una carretera. ¿Cuántos días habrían gastado si fueran 7 trabajadores?

2. Para transportar una cosecha de café, un camión que tiene capacidad para 5 toneladas, debe hacer 12 viajes. ¿Cuántos viajes debe hacer un cmión cuya capacidad es de 6 toneladas para transportar la misma cosecha?

UNIDAD 1
PENSAMIENTO VARIACIONAL

0.1. Lección 1. Expresiones algebraicas

En la frutería del colegio se venden los siguientes tipos de frutas:

- Manzanas a \$300.
- Peras a \$400.
- Bananos a \$100.
- Mangos a \$100.

EJERCICIO
Basados en la información anterior poner el valor correspondiente en los esacios en blanco.

1. Si el día lunes Sara, Carlos y Ana compraron una manzana, un banano y un mango. ¿Que debieron pagar?.

Manzana		Banano		Mango		
300	+	100	+	200	=	------

2. El dia martes Sara compra una pera y Carlos un mango ¿que debe comprar Ana para pagar un total de 800?

Pera		Mango		------		
400	+	200	+	------	=	800

3. Si el día miércoles Sara, Carlos y Ana pagan \$900, por tres frutas, ¿que e pueden comprar?

-----		-----		-----		
-----	+	-----	+	-----	=	900

4. Ana no pudo ir a estudiar el día viernes. Sin embargo Sara y Carlos si y comprando 4 frutas iguales Sara y Carlos 2 frutas iguales. El valor que pagaron fueron \$1200. ¿Que frutas pudieron haber llevado?

En la última pregunta,

- Existe mas de una respuesta correcta?
- Que valores se conocen y cuales no?

Cuando se tiene una incognita o un valor que puede variar, se le conoce como *variable* y se acostumbra representarlo con las últimas letras del alfabeto *(x, y, z)*. Si el valor que se tiene esta bien definido, se conoce con el nombre de *constante* y se representa con las primeras letras del alfabeto *(a, b, c, d)*.
Para nuestro caso, en la pregunta 4, se tiene la cantidad de frutas que llevan Sara y Carlos son constantes, (4 y 2 respectivamente). Pero las frutas que llevan son variables, si Sara lleva bananos, Carlos solo puede llevar pera o si Sara lleva mangos, Carlos solo puede llevar mangos.
Una exprsión algebraica es la union de una variable y una contante. Por ejemplo los siguientes términos, son expresiones algebraicas:

$$4x,\ -2y^2,\ 6xy$$

Pero tambien lo pueden ser la combinación de varios de estos términos unidos por signo + o signo -. Como por ejemplo

$$-4x^2 + 7y$$

$$4xy^3 - 3z + 8uv$$

Así, cuando la eexpresión está formada por un solo término, se conoce como monomio, y cuando tiene dos o más se conoce como polonomio.

0.2. Lección 2. Operaciones con expresiones algebraicas

La mamá de David y de Carlos le dió a cada una una bola con igual cantidad de uvas para que comieran en el descanso. Ninguno de los dos conoce la cantidad de uvas que hay en la bolsa.

1. Si 10 es la cantidad de uvas que hay en cada una de las bolsas, entonces en total hay

$$10 + 10 = 2\_\_\_\_\_\_$$

2. Si x, es la cantidad de uvas que hay en una de las bolsas, entonces ¿cuantas uvas tienen en total David y Carlos?

$$x + x = \_\_\_\_\_\_$$

3. Si la mamá le hubiera dado el doble de uvas a Carlos de las que le dió a David. ¿Cuanto serían la cantidad total de uvas?

$$2x + x = \_\_\_\_\_\_$$

La adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación de expresiones algebraicos, se conoce con el nombre de operaciones algebraicas.
Además, puesto que que estas variable, representan números reales, entonces estas operaciones cumplen las propiedades de los números reales.
Dos omas términos son semejantes si su parte literal junto con sus respectivos exponentes son iguales, por ejemplo:

- $4z^2$ y $3z^2$, son términos semejantes.
- $3x$, $-2x$ y $4x$, son términos semejantes.

ADICCIÓN Y SUSTRACCIÓN:
Solo es posible sumar o restar algebraicamente aquellos términos que sean semejantes:

EJEMPLO: Sumar los siguientes polinomios: $4z^3 + 5y^2 + 3y + 1$ y $3z^3 - 3y^2 + 3$.
SOLUCIÓN:
Para reolver este problema, vamos a alinear los términos semejantes y pasamos a realizar la suma

$$\begin{array}{ccccccc} 4z^3 & + & 5y^2 & + & 3y & + & 1 \\ 3z^3 & - & 3y^2 & & & + & 3 \\ & & & & & & \\ 7z^3 & + & 2y^2 & + & 3y & + & 4 \end{array}$$

Para hacer resta o sustracción de polinomios, se le debe cambiar el sino al sustraendo, así para nestro ejemplo sería:

$$\begin{array}{ccccccc} 4z^3 & + & 5y^2 & + & 3y & + & 1 \\ -3z^3 & + & 3y^2 & & & - & 3 \\ & & & & & & \\ z^3 & + & 8y^2 & + & 3y & - & 2 \end{array}$$

0.3. Lección 3. Ecuaciones

Retomemos el caso de las caso de la frutería que se vió en la lección 1, de esta unidad y centremonos en el literal b.
En esta caso se nos plantea lo siguiente.

- El dia martes Sara compra una pera y Carlos un mango ¿que debe comprar Ana para pagar un total de 800?

Para resolver este problema, debemos plantear la siguiente relación

$$400 + 200 + \_\_\_\_\_\_ = 800$$

En el espacio que está en blanco, se debe colocar un valor que haga que esta relación se cumpla.
Por simple inspección no es difícil determinar que este valor es 200.
Para que esta relación tenga más forma sentido, no pondremos un espacio, en vez utilizaremos una letra que tradicionalmente se ha utilizado para designar cantidades desconocidas como lo es x.

$$400 + 200 + x = 800$$

A este tipo de relaciones, se le conocen como **ecuaciones**, que son igualdades donde hay una o mas cantidades desconocidas llamadas incógnitas.
Al tener la variable como exponente 1, esta ecuación se denomina de primer grado.
Ahora, miremos como se pueden resolver este tipo de ecuaciones:

1. Hacer todas las operaciones indicadas, como por ejemplo reducir términos semejantes.
2. Hacer transposición de términos, agrupando en el lado de igualdad, los valores constantes y en otro las variable.
3. Por último dividimos toda la ecuación por el coeficiente de la variable.

Utilicemos entonces estos principios para resolver nuestra ecuación.

$$\begin{aligned}
400 + 200 + x &= 800 & \\
600 + x &= 800 & \text{Reducción de términos semejantes} \\
x &= 800 - 600 & \text{Transposición de términos} \\
x &= 200 &
\end{aligned}$$

EJEMPLO
Resolver $5x + x + 6 = 8x + 4$.
SOLUCIÓN.

$$6x + 6 = 8x + 4$$

$$6x - 8x = 4 - 6$$

$$-2x = -2$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-2}{-2}$$

$$x = 1$$

Existe una forma de verificar si este resultado es correcto y consiste en reemplazar el resultado en la ecuación original.
PRUEBA

remmplazamos $x = 1$, en la ecuación $5x + x + 6 = 8x + 4$.

$$5(1) + 1 + 6 = 8(1) + 4$$
$$5 + 1 + 6 = 8 + 4$$
$$12 = 12$$

Como la igualdad, se cumple. Entonces la ecuación está bien resuelta.

EJERCICIOS:
Resolver y verificar

1. $3x + 2 = 8$.
2. $5x + x + 6 == 8x + 4$.
3. $x - 5 = 3x + 25$.
4. $3x + 8x - 4 = 14 + x + 7x$.

ECUACIONES SIMULTANEAS:
Existen un tipo especial de ecuaciones que bienen en pares denominadas ecuaciones simultaneas, estas ecuaciones tienen dos variables y resolverlas, consiste en encontrar el par de valores qe satisfacen simultaneamente ambas ecuaciones. Miremos el siguiente caso:

2x	-	4y	=	-8
x	+	3y	=	11

Se puede verificar que $x = 2$ y $y = 3$, satisface este sistema.
Para encontra la respuesta a este sistema, existen varios métodos. Por el momento miremos como se procede por el método denominado igualción.
En este método se despeja una misma variable en ambas ecuaciones. Para nuestro caso

$$\begin{aligned} x &= \frac{4y-8}{2} \\ x &= 11 - 3y \end{aligned}$$

Ahoora, se igualan estas dos ecuaciones

$$\frac{4y-8}{2} = 11 - 3y$$
$$4y - 8 = 22 - 6y$$
$$4y + 6y = 22 + 8$$
$$10y = 30$$
$$y = \frac{30}{10}$$
$$y = 3$$

Ahora, se reemplaza este valor en cualquiera de las dos ecuaciones originales.
En este caso reemplacemos en la segunda ecuación.

$$x + 3y = 11$$
$$x + 3(3) = 11$$
$$x = 11 - 9$$
$$x = 2$$

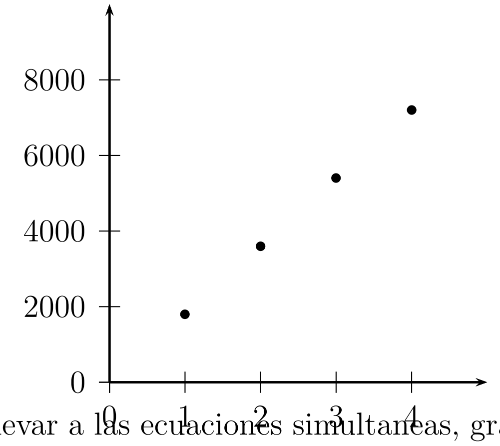
En la siguiente página hay una calculadora para resolver sistemas de ecuaciones
www.mathe_fa.de/es

0.4. Lección 4. Gráfica de ecuaciones lineales.

La ecuación qe describe la cantidad de dinero que recibe un conductor de bus es $y = 1800x$, donde y es el dinero que recibe y x el número de personas que abordan el bus.
Para plantear mejor esta situación, representemosla en una tabla

Cantidad	1	2	3	4
Dinero	1800	3600	5400	7200

Y así como se representó la situación por medio de una tabla, también se puede ubicar estos valores en una gráfica

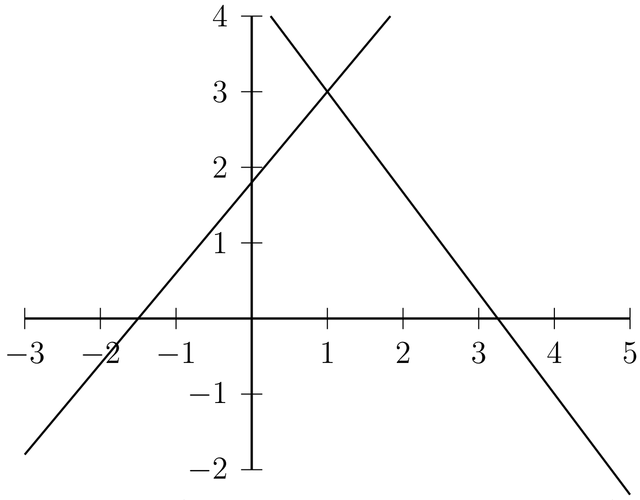


Esta situación se puede llevar a las ecuaciones simultaneas, graficandolas y en este caso obtendremos una colección de puntos que forman una recta.

Para este ejercicio tomemos el sistema

$$\begin{array}{cccccc} 6x & - & 5y & = & -9 \\ 4x & + & 3y & = & 13 \end{array}$$

Y realicemos sus gráficas, utilzando el siguiente software para graficar.
www.mathe_fa.de/es
Obtendremos lo siguiente.



El punto de intersección es la solución del sistema. En este caso sería $x = 1$ y $y = 3$.

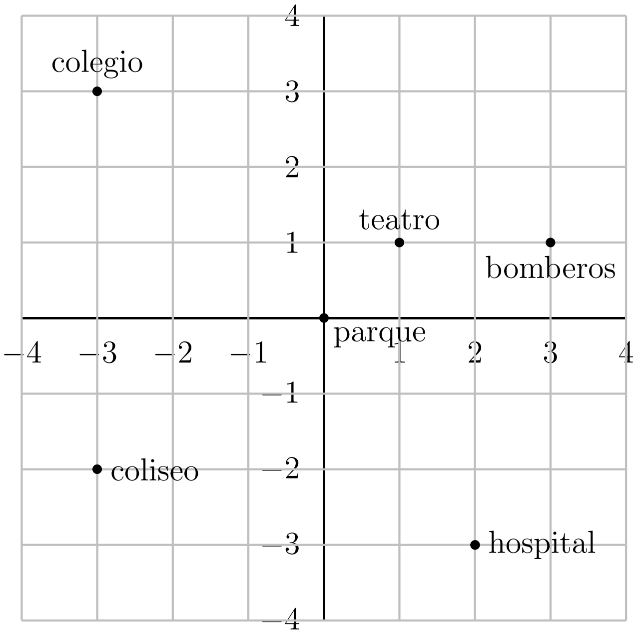
tilizando la misma calculadora, realicee las graficas para el sistema

$$\begin{array}{cccccc} 2x & - & y & = & -1 \\ 2x & - & y & = & 2 \end{array}$$

- ¿Que características tienen estas dos rectas?
- ¿Cual es la solución?

1. Lección 1. Distancia entre puntos

Los principales lugares del municipio de Quinchia, están ubicados como se muestra en la sigiente gráfica. Utilize los valores en los ejes x y y para referenciar los lugares.



Programa para ubicar puntos

PAR ORDENADO
Dos números sepaados con una coma y escritos eentre paréntesis se llama par ordenado.

$$(x, y)$$

El primer número, se denomina coordenada en x y el segundo coordenada en y.
A cada par ordenado se le asigna un punto en el plano cartesiano.

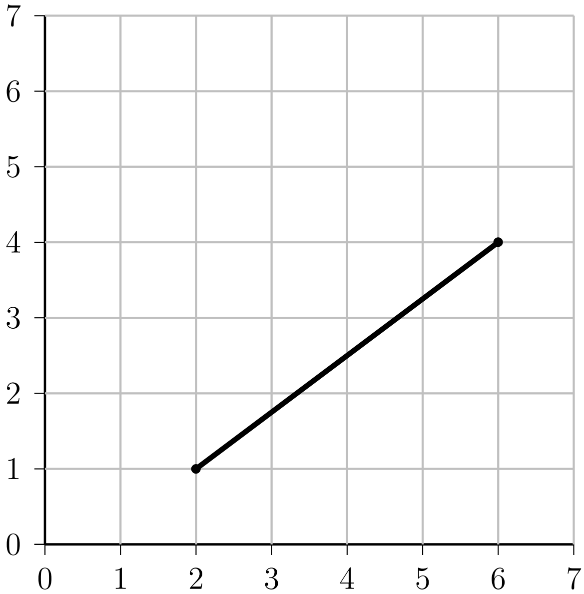
EJERCICIO:
Ubicar en el plano cartesiano.

1. $(1, 2)$.
2. $(3, 0)$.
3. $(-4, 4)$.
4. $(0, 0)$.
5. $(3, -5)$.
6. $(-5, -1)$.
7. $(0, -2)$.
8. $(-4, 0)$.

DISTANCIA ENTRE PUNTOS:
Si P_1 y P_2 son dos puntos del plano cartesiano con coordenadas $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces la distancia entre ellos se simboliza como $|\overline{P_1P_2}|$ y está dada por la relación

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO:
Hallar La distancia entre los puntos $(2, 1)$ y $(6, 4)$.



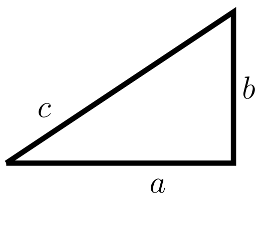
$$\begin{aligned}
|\overline{P_1P_2}| &= \sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}\\
|\overline{P_1P_2}| &= \sqrt{4^2+3^2)}\\
|\overline{P_1P_2}| &= \sqrt{16+9}\\
|\overline{P_1P_2}| &= \sqrt{25}\\
|\overline{P_1P_2}| &= 5
\end{aligned}$$

EJERCICIOS
Calcular la distancia entre los siguientes puntos

1. $P_1(2,1)$ y $P_2(6,4)$
2. $P_1(-4,3)$ y $P_2(-1,5)$
3. $P_1(-3,-4)$ y $P_2(4,-4)$
4. $P_1(4,3)$ y $P_2(-6,-5)$

2. Teorema de Pitágoras

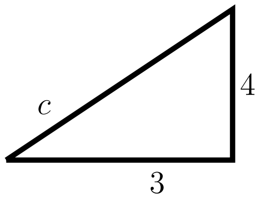
Sean a y b, los catetos de un triángulo rectángulo y c la hipotenusa.



Entonces, siempre se cumplirá que

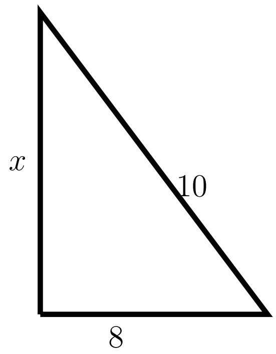
$$a^2+b^2=c^2$$

EJEMPLO:
Si los catetos de un triangulo rectangulo miden 3cm y 4cm, ¿Cuanto medirá su hipotenusa?



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 3^2 + 4^2$$
$$c^2 = 9 + 16$$
$$c^2 = 25$$
$$c = \sqrt{25} = 5$$

EJEMPLO:
Hallar el valor del cateto

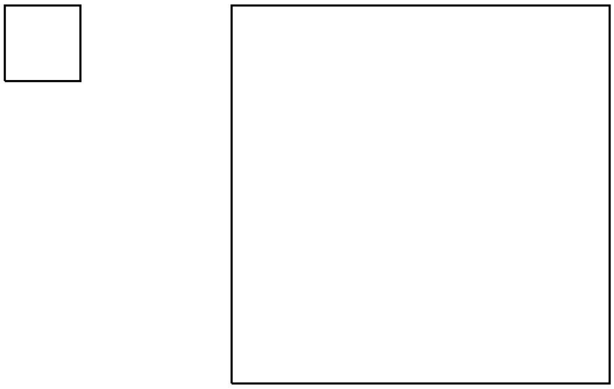


$$x^2 + 8^2 = 10^2$$
$$x^2 = 100 - 64$$
$$x = \sqrt{36} = 6$$

EJERCICIOS.:

3. Lección 3. Áreas

Se desea embaldosar el piso de n salón que tiene forma cuadrada. Laa medida del lado tiene una longitud de 3m y cada baldosa que también es de forma cuadrada tiene una medida de 50 cm por cada lado. ¿Cuántas baldosas se necesitan para cubrir la superficie del piso.?

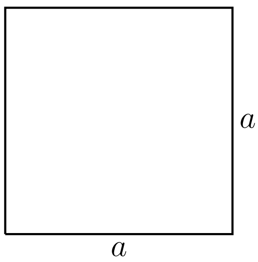


¿Que relación tiene el área del cuadrado y el del piso del salón?

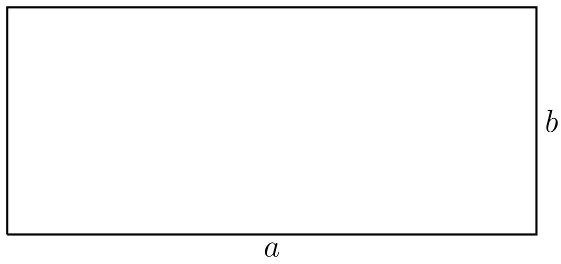
ÁREA:
Se define el área como un espacio bidimensional acotado engtre rectas o curvas.

ÁREA DE ALGUNAS FIGURAS:

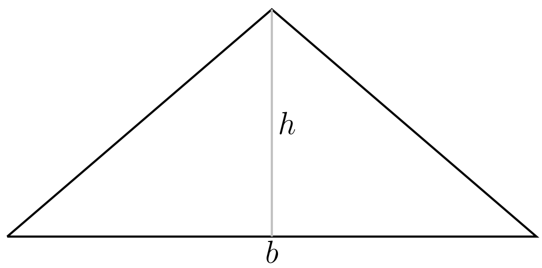
1. Cuadrado: $A = a \times a = a^2$.



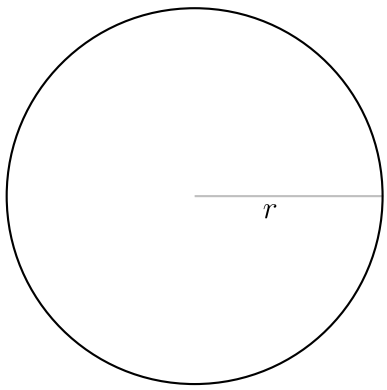
2. Rectánglo: $A = a \times b$



3. Triángulo: $A = \dfrac{b \times h}{2}$



4. Circulo:$A = \pi r^2$



UNIDAD 5
PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

---

1. Lección 1. Unidad de medida

Un estudiante compró una regla para hacer su tarea de geometría, y desea recordar la relación que existe entre cada una de las diferentes medidas que tiene.

DIBUJAR UNA REGLA

1. Cual de las siguientes medidas esta relacionada con la regla.
   a) Centímetro.
   b) Segundo.
   c) Milímetro.
   d) Gramo.
   e) Decímetro.

2. Complete los espacios en blanco
   a) Un decímetro tiene_________ centímetros.
   b) Un centímetro tiene _________ milímetros.
   c) Un decimetro tiene _________ milímetros.

UNIDAD DE MEDIDA
Se considera una de medida como una cantidad que se ha sido aceptada a nivel mundial por convención o por ley de una magnitud de física.

Las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo. Y en el sistema internacional están expresadas como sigue

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s

cuando se convinan magnitudes fundamentales, se generan magnitudes que reciben el nombre de magnitudes derivadas, como por ejemplo la velocidad donde hay magitudes de distancia y tiempo.

Para cada patrón de medida, existen multiplos y submultiplos.
MÚLTIPLOS

Prefijo	Símbolo	Factor
Deca	D	10
Hecto	H	10^2
Kilo	K	10^3
Mega	M	10^6
Giga	G	10^9
Tera	T	10^{12}
Peta	P	10^{15}
Exa	E	10^{18}

SUBMULTIPLOS

Prefijo	Símbolo	Factor
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

EJEMPLO:
1 kilo gramo es igual a 10^3 gramos.
1 μ segundo $= 10^{-6}$ segundos.

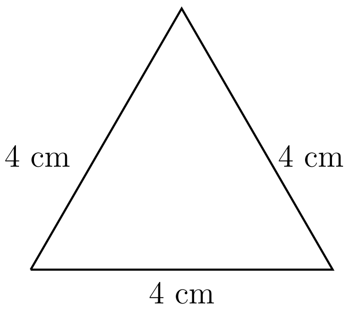
EJERCICIO:
Complete la tabla deacuerdo al patron de medida

kilometro	
Decagramo	10 g
decisegundo	
kiloamperio	
Hectocandela	100 cd
centimol	
Decametro	

2. Lección 2. Perímetro

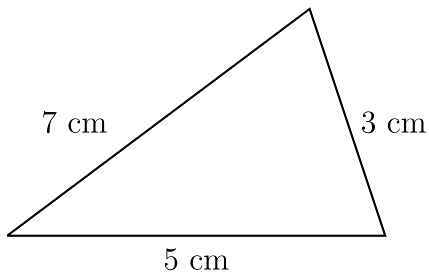
La palabra perímetro tiene sus raices en el griego *Peri*, que significa alrededor y *metro*, que significa medida. Es decir, la medida del alrededor de algo. Cuando tenemos un polígono, el perímetro de este se define como la suuma de las medidas de sus lados.

EJEMPLO
El perímetro de un triángulo equilatero que tiene como medidad en cada uno de sus lados 4 cm



P=4cm+4cm+4cm=12cm

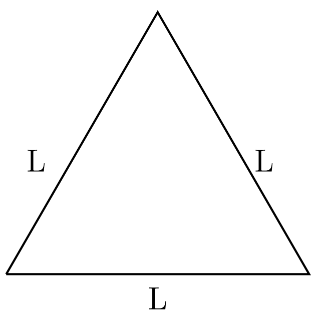
EJEMPLO:
Hallar el perímetro,



P=5cm+3cm+7cm=15cm

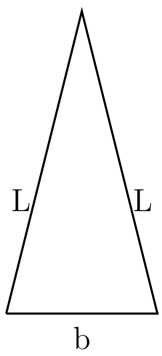
PERÍMETRO DE ALGUNAS FIGURAS:

- Triángulo equilátero:



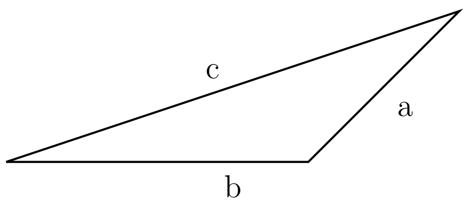
P=3L

- Triángulo isóceles



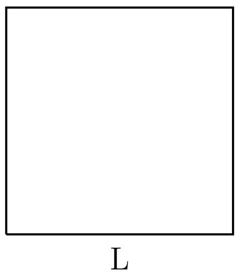
P=2L+b

- Triángulo escaleno



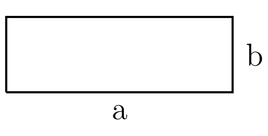
P=a+b+c

- Cuadrado



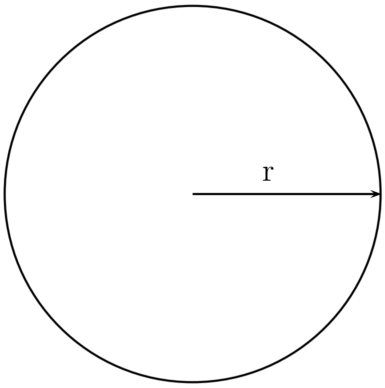
P=4L

- Rectángulo



P=2(a+b)

- Circunferencia

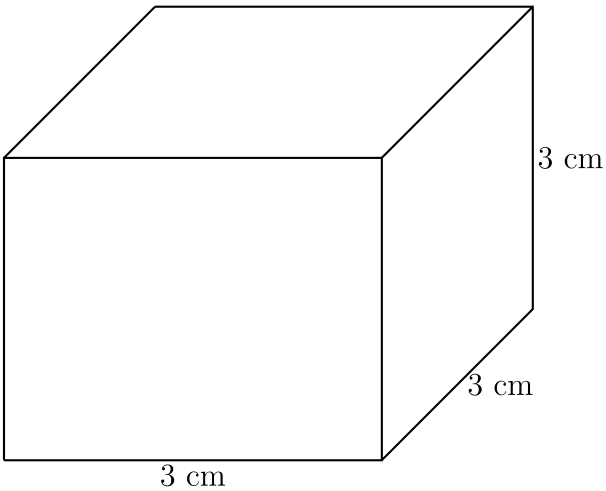


P=$2\pi r$

PROGRAMA:
Programa que al elegir una figura geométrica y se le digite los datos necesarios y se halle el perímetro.

3. Lección . Volumen

Tomemos como ejemplo un cubo de lado 3cm



PREGUNTAS

- ¿Cuantos cubo de 1 cm de lado se necesitan para llenar completamente el cubo de 3 cm de lado?
- ¿Cuantos cubos de 0.5 cm de lado se necesitan para llenar el cubo de 3 cm de lado?
- ¿Y si se llenara de agua?

El volumen se define como el espacio que ocupa un cuerpo.
Arquimedes utilizó un método experimental para encontrar el volumen de un cuerpo, que consisteee en sumergir el cuerpo en un recipiente con agua y observamos la cantidad de líquido desplazado para determinar el volumen del cuerpo.
El volumen de algunas figuras, se puede encontrar utilizaando fórmulas matemáticas:

- Cubo: Volumen=Lado$\times$Lado$\times$Lado.
- Paralelepipedo: V=Largo$\times$Ancho$\times$Alto.
- Esfera: V=$\frac{4}{3}\pi r^3$.
- Cilindro: V=$\pi r^2 h$.
- Cono: V=$\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

PROGRAMA:
Programa que encuentre el volumen de una figura dada, donde el usuario entra los valores requeridos.

UNIDAD 5
PENSAMIENTO ALEATORIO

---

1. Lección 1. Distribución de frecuencia

Una muy buena manera de organizar datos es mediante una *tabla de frecuencia*, esta además de presentar los datos en forma organizada, sirve para hacer análisis posteriores muy importantes en la comprensión de la forma como se distribuyen y en el análisis estadístico, todo con el fin de descubrir propiedades de interés en el estudio del fenómeno.

1.1. Para datos cuantitativos

Lo primero que debemos determinar para nuestra tabla de frecuencia cuando se tienen datos cualitativos, es el *número de intervalos*, los cuales perfectamente pueden ser determinados en forma empírica entre 5 y 15, proporcional al número de datos.
Cuando no se tiene seguridad en el tema, una buena solución es utilizar la fórmula de *Sturges*:

$$k = 1 + 3,322 \log n, \tag{1}$$

donde n es el número de datos y k el número de intervalos.
Luego encontramos en ancho del intervalo con la fórmula

$$I = \frac{D_M - D_m}{k}, \tag{2}$$

Donde D_M es el dato mayor, D_m el dato menor e I el ancho del intervalo.
Con estos resultados, realizaremos una tabla donde sus columnas serán:

1. Intervalos. Donde estarán los límites inferiores y superiores de cada intervalo.
2. Marca de clase (m_i): Que es el punto medio de cada intervalo.
3. Frecuencia absoluta (f_i): Que es el número de veces que aparece un determinado valor en el intervalo.
4. Frecuencia acumulada (F_i): Que es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

EJEMPLO:
Los siguientes datos corresponden al peso en kilogramos de 50 personas. Expresar estos datos en una tabla de frecuencia.

71	58	55	80	73	75	67	60	69	59
77	54	51	60	68	72	78	82	57	61
58	67	72	68	74	65	72	79	80	60
60	78	78	73	74	75	80	76	70	67
84	76	65	67	73	74	58	60	66	70

SOLUCIÓN:
Con la fórmula (1), podemos hallar el número de intervalos, sabiendo que $n = 50$.

$$k = 1 + 3,322 \log 50 = 6,64 \approx 7.$$

Tomaremos $k = 7$, pues siempre debemos aproximar al primer entero mayor.
Ahora, de la lista de datos identificamos que $D_m = 51$ y $D_M = 84$. Y con la fórmula (2), tenemos que:

$$I = \frac{84 - 51}{7} = 4{,}7 \approx 5.$$

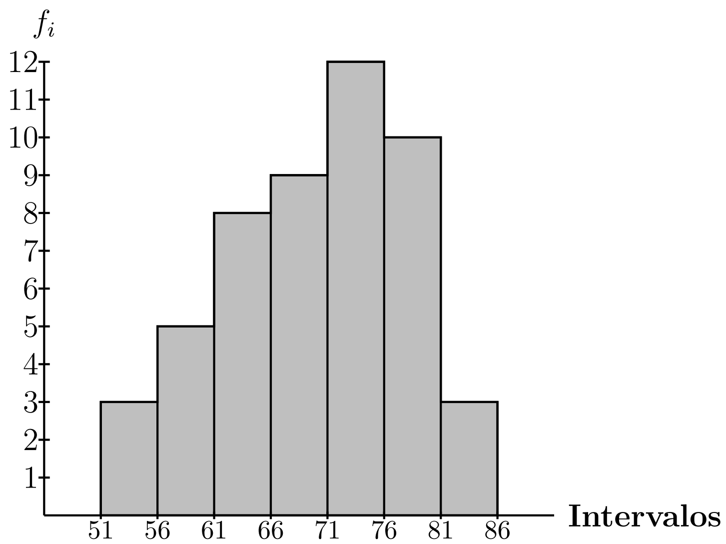
INTERVALO	m_i	f_i	F_i
51 a 55	53	3	3
56 a 60	58	5	8
61 a 65	63	8	16
66 a 70	68	9	25
71 a 75	73	12	37
76 a 80	78	10	47
81 a 85	83	3	50

2. Leccion 2. Diagrama de barras y diagramas circulares

Existen varios tipos de gráficos, como son *el histograma*, y *el diagrama circular* entre otros, que se utilizan para expresar la tabla de frecuencia de una forma más informativa.

2.1. El histograma

En este gráfico, se le asigna a el eje horizontal, los valores inferiores de los intervalos, y a el eje vertical, las frecuencias absolutas y por medio de rectángulos se hace la relación.
A continuación se presenta el *histograma*, para el **ejemplo 1.1.**



3. Leccion 3. Medidas de posicion central

Cuando se tiene un conjunto de datos, es muy conveniente contar con un valor que represente toda la distribución. Dicho valor busca ubicarse de la manera mas representativa en el centro. Las medidas que buscan ubicarse en el centro de la distribución se conocen como *medidas de tendencia central*, y las mas utilizadas son la media, la mediana y la moda.

4. Media

Esta medida es la más utilizada de las de tendencia central. Se conoce como el promedio y se encuentra sumando todos los datos y dividiendo por el número de datos.

$$M = \frac{\text{Sumatoria de los datos}}{\text{Número de datos}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{3}$$

EJEMPLO
¿Cuál será la nota definitiva de un curso de estadística si un estudiente obtuvo como notas parciales: 3.5, 4.0, 4.5?

SOLUCIÓN:
Utilizando (3), $M = \dfrac{3{,}5 + 4{,}0 + 4{,}5}{3} = 4{,}0$.

4.1. Media para datos agrupados

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i f_i}{n} \tag{4}$$

Debemos añadir otra columna en la tabla donde encontremos $m_i f_i$.

INTERVALO	m_i	f_i	F_i	$m_i f_i$
51 a 55	53	3	3	159
56 a 60	58	5	8	290
61 a 65	63	8	16	504
66 a 70	68	9	25	612
71 a 75	73	12	37	876
76 a 80	78	10	47	780
81 a 85	83	3	50	259
$\sum$		50		3480

Ahora es fácil determinar que

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i f_i}{n} = \frac{3480}{50} = 69{,}6$$

5. Mediana

La mediana es el valor que se encuentra en la posición de la mitad en un conjunto de de datos organizados ya sea creciente o decrecientemente. Se utiliza cuando se observa que la distribución tiene tendencia hacia algún extremo.
Una vez los datos están organizados se escoge el valos así:

- Si el número de datos es impar, se toma el valor que esté situado en la mitad.
- Si el número de datos es par, se promedian los dos valores de la mitad.

5.1. Para datos agrupados

$$M_e = L_i + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} I \tag{5}$$

Primero debemos identificar, que en que intervalo está la mediana. Para esto calculamos

$$\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

De la tabla de frecuencia, en la columnua de de frecuencia acumulado el valor de 25 o el valor maor más cercano a 25. Entonces, se tiene que $L_i = 66$, $F_{i-1} = 16$, $f_i = 9$.

$$M_e = 66 + \frac{25 - 16}{9} \cdot 9$$

$$M_e = 75$$

6. Moda

La moda se define como el valor que mas se repite. Por ejemplo, es fácil determinar que en el siguiente grupo de datos, la moda es 6.

$$4, 6, 7, 7, 6, 6$$

6.1. Para datos agrupados

$$M_o = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} I$$

Donde $d_1 = f_i - f_{i-1}$; $d_2 = f_i - f_{i+1}$.
En este caso los valores se tomarán de el intervalo donde la frecuencia sea mayor.

Para nuetro ejemplo tenemos entonces que:
$L_i = 71$, $d_1 = 12 - 9 = 3$, $d_2 = 12 - 10 = 2$.

$$M_o = 71 + \frac{3}{3 + 2} 5 = 74$$

7. Leccion 4. Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión nos sirven para determinar que tan centrada se encuentra una distribución, esto significa que determinaremos que tan alejados se encuentran en promedio, los valores de su valor central.
La medida de dispersión que encontraremos será la *desviación estandar*, la cual para datos agrupados, se define como:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - M_e)^2}{n}}$$

Para encontrar los términos de eta fórmula, nos ayudaremos de la tabla de frecuencia.

INTERVALO	m_i	f_i	F_i	$m_i - M_e$	$(m_i - M_e)^2$	$f_i(m_i - M_e)^2$
51 a 55	53	3	3	-22	484	1452
56 a 60	58	5	8	-17	289	1445
61 a 65	63	8	16	-12	144	1152
66 a 70	68	9	25	-7	49	441
71 a 75	73	12	37	-2	4	48
76 a 80	78	10	47	3	9	90
81 a 85	83	3	50	8	64	192
$\sum$						4820

tenemos entonces que:

$$s = \sqrt{\frac{4820}{50}}$$

$$s = 9{,}81$$

EJERCICIO:

Utilizando una hoja de cálculo, como por ejemplo *Excel*, organizar los siguientes datos en una tabla de frcuencia, realizar un histograma y hallar la media, la mediana, la moda y la desviación estandar.

1.

1025	1042	1195	880	945
1102	845	1095	936	790
1097	913	1245	1040	998
998	940	1043	1048	1130
1017	1140	1030	1171	1035

2.

3	10	19	27	34	38	48	56	67	74
4	12	20	29	34	39	48	59	67	74
7	14	21	31	36	43	52	62	69	76
9	15	25	31	37	45	53	63	72	79
10	17	27	34	38	47	56	64	73	80